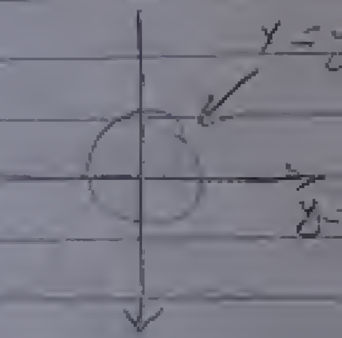
PAGE محاضرة ١
DATE

limits

$$* \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$ ⇒ for the path $x=y$

$$\therefore \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{2y^2} = \frac{1}{2}$$



⇒ for the path $y=0$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2+0} = \frac{0}{0}$$ غير موجودة

$\therefore$ ⇒ the limit is not Exisit.

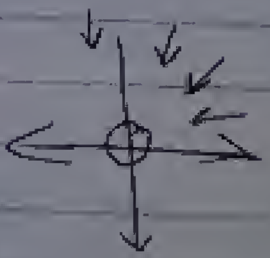
another Solution

put $x = r\cos\theta$ $\quad y = r\sin\theta$

$$\therefore \lim_{(r,\theta)\to(0,0)} \frac{r^2\cos\theta\, r\sin\theta}{r^2} = \frac{1}{2}\lim_{(r,\theta)\to(0,0)} 2\cos\theta\sin\theta$$

$$\therefore \frac{1}{2}\lim_{\theta\to 0} \sin 2\theta$$

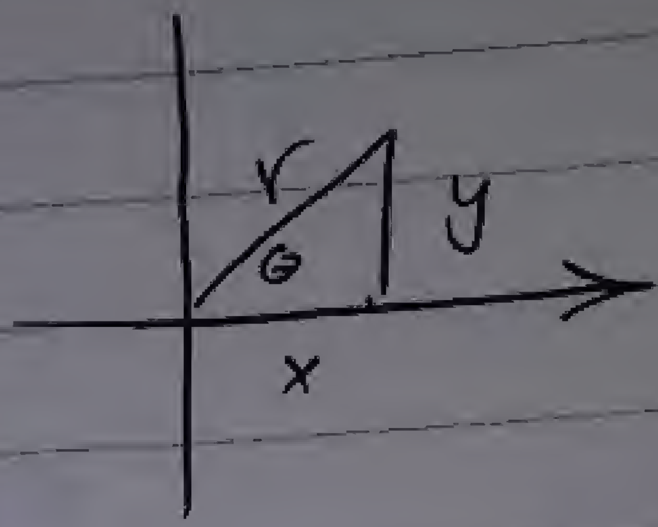
Put $\theta = 0, 2, 90 \dots$



$\therefore$ the limit is not exisit

PAGE
DATE

(2) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$$



هنحول الصورة الكارتيزية الى r,θ

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

$$\lim_{(r,\theta)\to(0,0)} \frac{r^3\cos^3\theta + x^3\sin^3\theta}{r^2}$$

$$\lim_{(r,\theta)\to(0,0)} r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 0$$

$\Rightarrow$ $\because$ whatever the value of θ lim $\to 0$

التفاضل الجزئي * Partial of Differentiation

* $z(x,y) = x^2y + 2yx$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 2y \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2x$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2x \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \text{zero}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x + 2$$

هنفاضل z بالنسبة لـ x
والناتج نفاضله بالنسبة لـ y
أو العكس ... الناتج النهائي هيطلع واحد

$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = \partial_x z$

$\frac{\partial z}{\partial y} = z_y = \partial_y z$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx} = \partial_x^2 z$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{xy} = \partial_{x,y}^2 z$

* Chain Rule

$$z \to x \to t, \quad z \to y \to t$$

$z = f_n(x, y)$

$y = f_n(t)$, $x = f_n(t)$

$\therefore \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = \underline{\nabla z} \odot \underline{V}$

ممكن نكتبها $\frac{dy}{dt}$ بس ... علشان y دالة في متغير واحد وهو t

Directional derivative (Nabla) ∇ — المشتقة الاتجاهية

$$\boxed{\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)}$$

$\Rightarrow z = xy^2$ (Scalar)

$\nabla z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial z}\right)$

$\nabla z = (y^2, 2xy, 0)$ (Vector)

الـ Nabla بتدخل ع الدالة بتحولها من
دالة قياسية Scalar
لـ دالة متجهة Vector.

$\nabla z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$

$\underline{V} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}\right)$

$\therefore \frac{dz}{dt} = \underline{\nabla z} \odot \underline{V}$

PAGE
DATE

ال Nabla لو دخلت على دالة قياسية بتحولها لمتجهه

ولو دخلت على دالة Vector بتحولها لـ tensor

$$\text{tensor} = A = \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{pmatrix}$$

$A_{xx} \rightarrow$

σ_{xx} ⇐ الاجهاد اللي بيأثر على المستوى العمودي على محور x في اتجاه x (اجهاد شد أو ضغط)

σ_{xy} ⇐ " " " " " " " " x في اتجاه y
" اجهاد قص

المعنى الهندسي لـ ∇

∇F هو متجه يعبر هندسياً عن العمودي على السطح

ex:- $f(x,y,z) = x^2 + z^2 - g + y^2$

أو $x^2 + y^2 + z^2 = g$

⇒ Find the unit normal to the geometry $f(x,y,z)$

at the point $(1, 1, \sqrt{7})$

النقطة $(1,1,\sqrt{7})$ تحقق معادلة الكرة

Gradiant الانحدار

⇒ $\nabla F(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$ ⇐ دالة الأعمدة ع سطح الكرة.

$\nabla F\big|_{(1,1,\sqrt{7})} = (2, 2, 2\sqrt{7})$ ⇐ المتجه العمودي على سطح الكرة عند نقطة $(1,1,\sqrt{7})$.

Hi . Sta

PAGE
DATE

$$\Rightarrow |\nabla F| = \sqrt{4+4+28}$$

$$\hat{\underline{\nabla F}} = \frac{\nabla F}{|\underline{\nabla f}|}$$

unit

ex:- IF $z(x,y) = xy^2$, $x = fn(t)$
$y = fn(t)$

find the total Change in z when $(x,y) \longrightarrow (1,2)$ and the velocity of (x,y) was $(3,4)$

عايز محصل تغير Z
لما يتغير سرعة النقطة
$(3,4) = (x,y$

(Solution)

$$\nabla z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = (y^2, 2xy)$$

$$\underline{V} = (3,4)$$

$$\frac{dz}{dt} = \underline{\nabla z} \cdot \underline{V} = (y^2, 2xy) \cdot (3,4)$$

$$\frac{dz}{dt} = 3y^2 + 8xy$$

at $(1,2)$ $\therefore \frac{dz}{dt} = 12 + 16 = 28$